ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1983

OPTION P'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie non nulle et $\mathfrak{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. Si f et g sont deux éléments de $\mathfrak{L}(E)$, le composé $f \circ g$ est noté fg et on pose $[f, g] = fg - gf$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, f^{n+1} est défini par $f^{n+1} = f f^n$, où f^0 désigne l'automorphisme identité I de E ; pour tout polynôme $P(X) = a_0 + \ldots + a_n X^n$ à coefficients complexes, P(f) est l'élément de $\mathfrak{L}(E)$ défini par $P(f) = a_0 I + \ldots + a_n f^n$. Enfin, $f \in \mathfrak{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f^n = 0$.

On rappelle que les démonstrations doivent s'appuyer sur des théorèmes du programme, ce qui exclut en particulier l'emploi du théorème de Cayley-Hamilton.

I

1 - *a*. Soit $f \in \mathfrak{L}(E)$. Montrer qu'il existe un polynôme non nul P tel que $P(f) = 0$.

***b*.** Soit P un polynôme non nul tel que $P(f) = 0$, et de degré minimal parmi les degrés des polynômes non nuls Q tels que $Q(f) = 0$. Montrer que toute racine de P est valeur propre de f.

***c*.** En déduire que f est nilpotent si et seulement si sa seule valeur propre est 0.

2 - Soient f_1, f_2, f_3 trois éléments de $\mathfrak{L}(E)$. Établir l'égalité

$$[f_1 f_2, f_3] = [f_1, f_3] f_2 + f_1 [f_2, f_3] .$$

3 - Soient f et g deux éléments de $\mathfrak{L}(E)$. Dans toute cette question 3, on fait l'hypothèse :

$$H_1 \qquad [f, [f, g]] = 0 ,$$

et on pose $h = [f, g]$.

***a*.** Montrer que pour tout polynôme P on a

$$[P(f), g] = P'(f)\, h$$

où P' est le polynôme dérivé de P.

***b*.** Pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$, établir l'égalité

$$P^{(k)}(f)\ h^{2^k - 1} = 0$$

où $P^{(k)}$ est le polynôme dérivé d'ordre k de P (on pourra utiliser le produit $h^{2^k-1} [P^{(k)}(f)\, h^{2^k-1}, g]$).

***c*.** Montrer que h est nilpotent.

4 - Soient f et g deux éléments de $\mathfrak{L}(E)$. On pose $h = [f, g]$ et on fait dans toute cette question 4 l'hypothèse :

H_2 h est une combinaison linéaire de f et g .

a. Montrer que h est nilpotent (on pourra étudier d'abord le cas où h est lié soit à f seul, soit à g seul) .

b. Montrer que f et g ont un vecteur propre non nul commun.

5 - On suppose dans cette seule question que la dimension de E est 3 et on détermine, pour une base (e_1, e_2, e_3) de E , les endomorphismes f et g par les conditions

$$f(e_1) = e_2 , \quad g(e_1) = e_1 , \quad f(e_2) = g(e_2) = 0 , \quad f(e_3) = g(e_3) = e_3 .$$

Le couple (f, g) vérifie-t-il l'hypothèse H_1 ? Vérifie-t-il l'hypothèse H_2 ? Donner un exemple d'endomorphisme f_1 nilpotent et non nul tel que le couple (f_1, g) vérifie H_1 .

6 - Soient f et g deux projecteurs distincts, non nuls et vérifiant l'hypothèse H_2 écrite sous la forme

$$fg - gf = \alpha f + \beta g \qquad (\alpha \in \mathbb{C} , \beta \in \mathbb{C}) .$$

a. Montrer que si α est différent de 0 et de 1 , l'image de f est incluse dans l'image de g ; en déduire que $gf = f$, puis que $\alpha + \beta = 0$ et que $\alpha = -1$.

b. Montrer que si α est différent de 0 et de -1 , le noyau de g est inclus dans le noyau de f ; en déduire que $fg = f$, puis que $\alpha + \beta = 0$ et que $\alpha = 1$.

c. En conclure que si f et g sont deux projecteurs vérifiant l'égalité $fg - gf = \alpha f + \beta g$ et dont le produit n'est pas commutatif, le couple (α, β) ne peut prendre que l'une des deux valeurs $(-1, 1)$ et $(1, -1)$; *caractériser* chacun de ces deux cas par une comparaison soit entre les images, soit entre les noyaux de f et de g .

Dans chacun de ces deux cas, le couple (f, g) vérifie-t-il H_1 ?

II

Dans toute cette partie, f est un élément nilpotent et non nul de $\mathfrak{L}(E)$, et, en considérant $\mathfrak{L}(E)$ comme un espace vectoriel, on note θ_f l'endomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ défini pour tout $g \in \mathfrak{L}(E)$ par $\theta_f(g) = [f, g]$.

1 - Construire un endomorphisme $g_1 \in \mathfrak{L}(E)$ tel que fg_1 et $g_1 f$ ne soient nilpotents ni l'un ni l'autre.

2 - On suppose dans cette question que $g \in \mathfrak{L}(E)$ est tel que $[f, [f, g]] = 0$.

a. Pour tout entier $k \geqslant 1$, montrer que si x appartient au noyau E_k de f^k , on a aussi $fg(x) \in E_k$.

b. Soit x un vecteur propre non nul de fg, associé à la valeur propre λ , et soit k le plus petit entier strictement positif tel que $x \in E_k$. Établir l'égalité

$$[f, g]\, f^{k-1}(x) = \frac{\lambda}{k}\, f^{k-1}(x) .$$

c. Montrer que fg est nilpotent. En est-il de même de gf ?

.../...

3 - L'endomorphisme θ_f est-il nul ?

4 - Dans toute la suite du problème, on note n l'entier, appelé *indice de nilpotence* de f, tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Établir pour tout entier $p \geqslant 1$ l'égalité

$$(\theta_f)^p(g) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_p^k f^{p-k} g f^k$$

où les C_p^k sont les coefficients du binôme.

b. En déduire que θ_f est nilpotent.

5 - ***a***. Pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, construire un élément $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $aba = a$.

b. Déduire de ce qui précède que f^{n-1} appartient à l'image de l'endomorphisme $(\theta_f)^{2n-2}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

6 - Quel est l'indice de nilpotence de θ_f, cet indice étant défini comme celui de f ?

7 - On suppose que E est de dimension 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que l'image et le noyau de f coïncident.

a. Montrer que f est nilpotent d'indice 2.

b. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que, d'après II.5.*b*., $f = \theta_f^2(g)$. Montrer que $(g, \theta_f(g), f, I)$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ par rapport à laquelle on écrira la matrice de θ_f. Donner une base de l'image de θ_f et une base de son noyau.

♦ ♦ ♦